E-school di Arrigo Amadori

Analisi I

Serie di Taylor

01 – Introduzione.

La serie di Taylor permette di approssimare una funzione qualunque in un polinomio di grado qualunque. L'approssimazione, inoltre, può essere portata alla precisione desiderata.

Essendo i polinomi le funzioni più semplici da trattare, è ovvio che la serie di Taylor costituisce uno strumento di calcolo insostituibile.

In questo capitolo ci limitiamo alle serie di Taylor delle funzioni reali. I concetti qui esposti verranno successivamente estesi alle funzioni complesse e alle funzioni sui sottoinsiemi di R• .

02 – Serie di Taylor.

Sia f una funzione numerica reale di dominio [a , b] e sia x0 un punto del dominio.
Se la funzione è indefinitamente derivabile in x0 la serie :

$$f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0)+\frac{1}{6}(x-x_0)^3 f'''(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)$$

si chiama **serie di Taylor** della funzione f di punto iniziale x0 .

Ricordiamo che n! = 1 * 2 * 3 * … * n (fattoriale di n) , che 0! = 0 , 1 ! = 1 , e che :

$$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$$

Si può facilmente notare che la serie di Taylor di valore iniziale 0 corrisponde alla formula mostrata nel capitolo relativo alle serie di potenze per quanto riguarda la derivata.

Se si verifica che :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0),\ x\in[a,b]$$

Si dice che la funzione f è **sviluppabile in serie di Taylor** di valore iniziale x0 nel punto x .

La sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor non è sempre possibile. Vi sono funzioni che hanno la serie di Taylor non uguale alla funzione stessa.

Ciò significa che data una funzione qualunque, si può sempre determinare la sua serie di Taylor rispetto ad un punto iniziale (basta che la funzione sia derivabile indefinitamente in quel punto) ma la serie di Taylor ottenuta non è sempre uguale alla funzione data.

Vi sono alcuni teoremi che assicurano la convergenza della serie di Taylor alla funzione data.

03 – Teoremi sulla convergenza.

Si chiama **resto n+1-esimo** della serie di Taylor la differenza fra la funzione e la sua serie di Taylor di punto iniziale x0 troncata al termine n-esimo e si indica con :

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x - x_0)^n f^{(k)}(x_0)$$

Si dimostra che :

la funzione f numerica reale definita su [a , b] è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x0 appartenente ad [a , b] nel punto x appartenente ad [a , b] se e solo se il resto n+1-esimo tende a 0 per n tendente all'infinito, ovvero se :

$$\lim_{n \to \infty} R_{n+1} = 0$$

Un altro teorema, di più semplice utilizzo del precedente, afferma che (omettiamo la dimostrazione) :

sia data la funzione numerica reale f definita su [a , b] . La funzione sia anche continua e derivabile indefinitamente su [a , b] e le derivate siano tutte continue. Consideriamo i punti x0 ed x di [a , b] con x0 < x . Se esistono i numeri reali positivi c ed L tali che :

$$\sup_{[x_0, x]} \left| f^{(n)}(x) \right| < c \cdot L^n, \forall n \in I^+ \bigcup \{0\}$$

allora f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x0 nel punto x .

Questo teorema è molto importante perché tramite semplici considerazioni sulle derivate permette di stabilire se una funzione è sviluppabile in serie di Taylor.

Per gli sviluppi in serie di Taylor di punto iniziale 0 esiste il **teorema di Bernstein** che afferma (omettiamo la dimostrazione) :

sia f una funzione numerica reale positiva o nulla definita su [0 , r] ed ivi indefinitamente derivabile con derivate continue tutte positive o nulle nell’intervallo [0 , r] . Sotto queste condizioni f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 nel punto x appartenente all’intervallo [0 , r[.

Per concludere l’argomento sulla convergenza delle serie di Taylor e fornire tutti gli strumenti necessari a verificarla, riportiamo (senza dimostrazione) alcune formule per calcolare il resto di una serie di Taylor di punto iniziale x0 nel punto x .

Resto secondo Lagrange :

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(x - x_0\right)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

Resto secondo Cauchy :

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\left(x - \xi\right)^{n}\left(x - x_0\right) f^{(n+1)}(\xi)$$

dove ξ è un opportuno numero reale appartenente all’intervallo [x0 , x] .

Le due formule permettono di fare considerazione sul resto di una serie di Taylor ed in particolare di fare una stima sulla sua grandezza e quindi una stima sulla bontà dell’approssimazione ottenuta troncando la serie di Taylor al termine n-esimo.

04 – Esempi.

Riportiamo alcuni esempi di sviluppo in serie di Taylor.

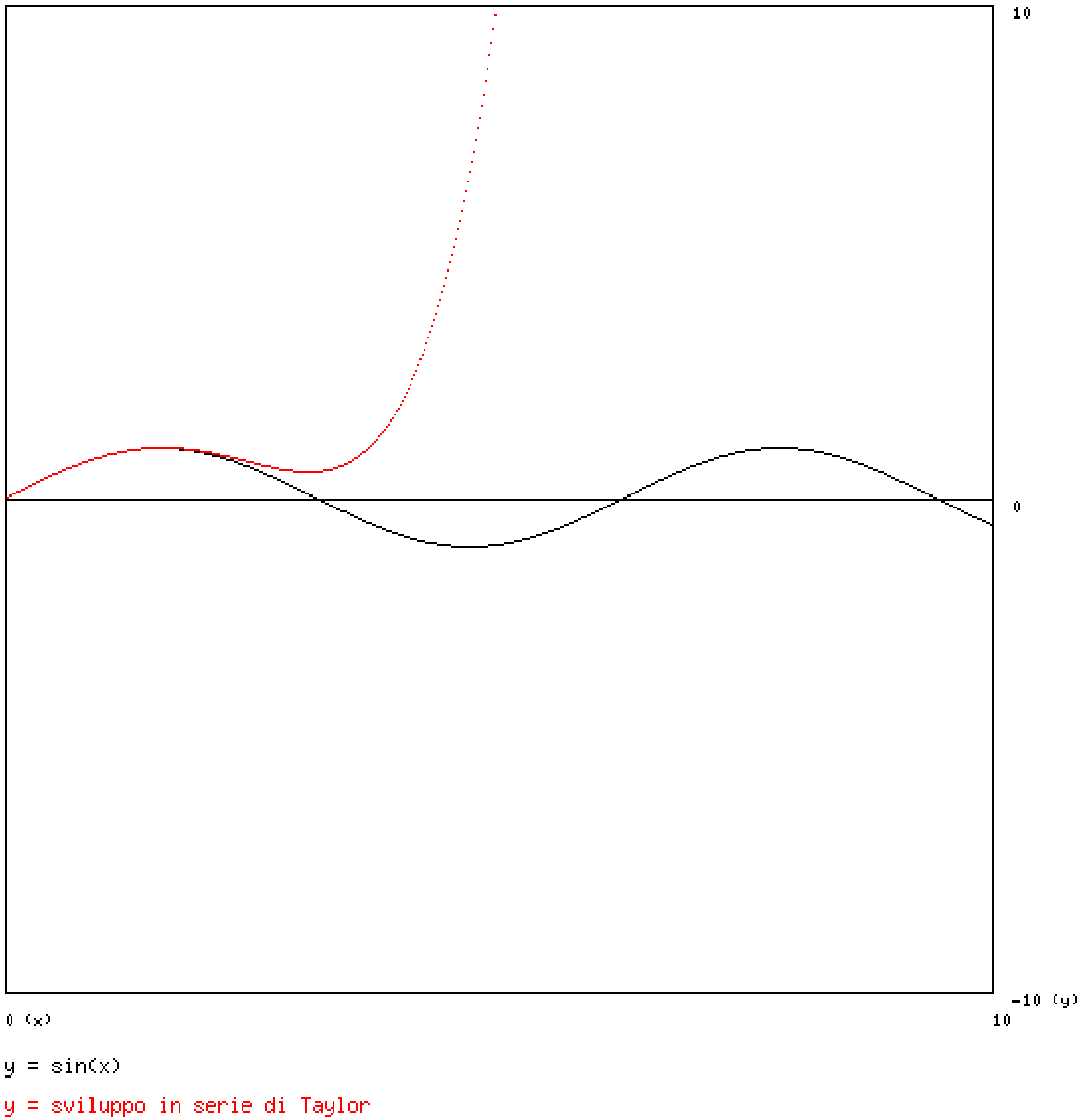
- 1 - y = sen x

la serie di Taylor di punto iniziale 0 è :

$$senx = sen0 + x\cos 0 + \frac{x^2}{2!}(-sen0) + \frac{x^3}{3!}(-\cos 0) + \ldots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

che converge alla funzione per ogni valore di x appartenente ad R in quanto sen x e le sue derivate successive sono tutte ≤ 1 per cui sono valide le condizioni per la convergenza.

Si noti nel grafico seguente la precisione dello sviluppo (per n = 5) :



- 2 - y = cos x

la serie di Taylor di punto iniziale 0 è :

$$\cos x = \cos 0 + x(-sen 0) + \frac{1}{2!}x^2(-\cos 0) + \frac{1}{3!}x^3 sen 0 + \ldots = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

che converge alla funzione per ogni valore di x appartenente ad R (considerazioni analoghe al caso precedente)

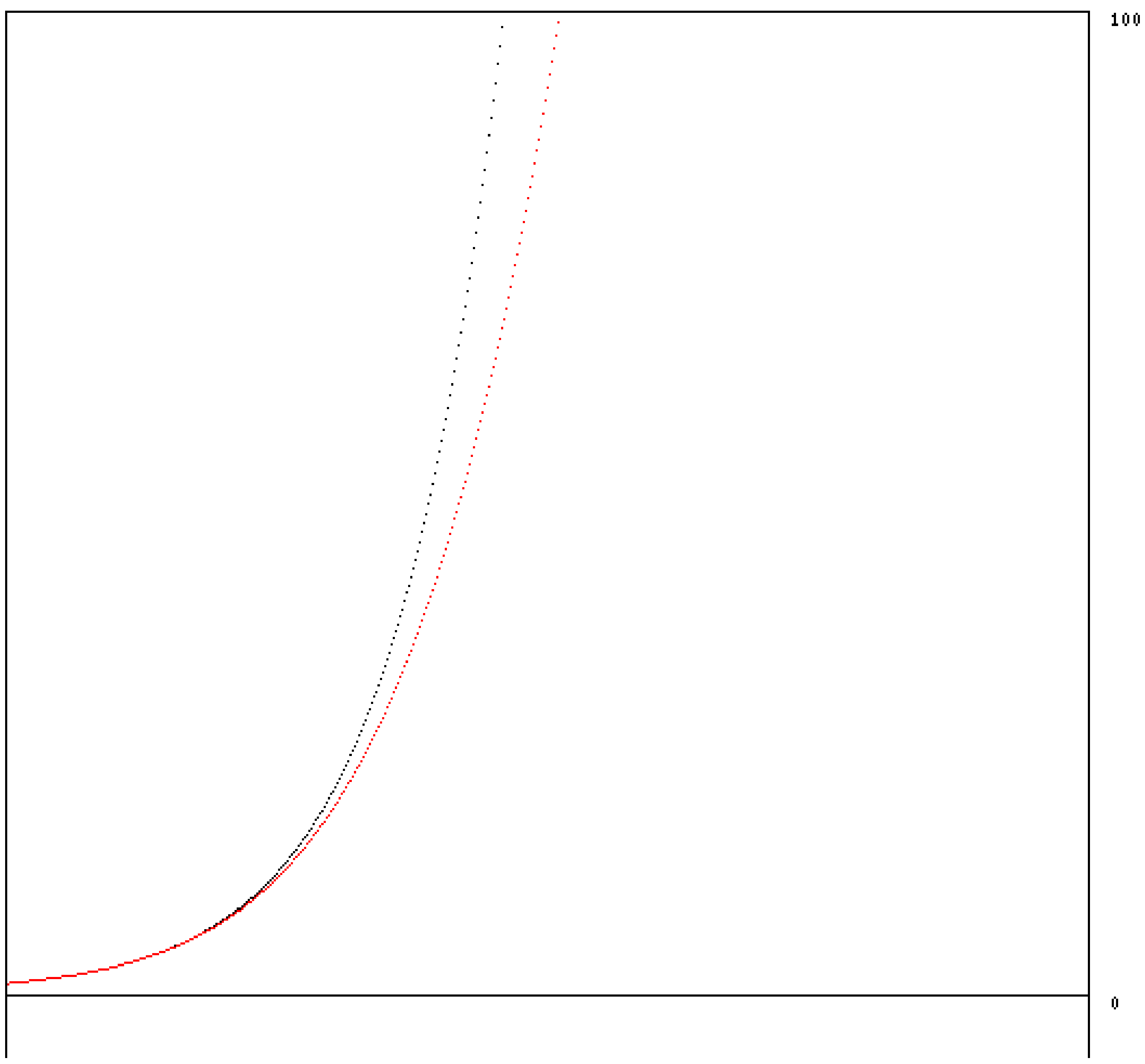
- 3 - y = exp(x)

la serie di Taylor di punto iniziale 0 è :

$$e^x = e^0 + xe^0 + \frac{1}{2!}x^2e^0 + \frac{1}{3!}x^3e^0 + \ldots = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

che converge alla funzione per ogni valore di x appartenente ad R in quanto la derivata n-esima di exp(x) è exp(x) che è una funzione crescente per cui l a funzione e le sue derivate sono tutte minori di un valore exp a preso convenientemente (x < a).

Si noti nel grafico seguente la precisione dello sviluppo (per n = 5) :



Fine.

[Pagina precedente]

[Home page]